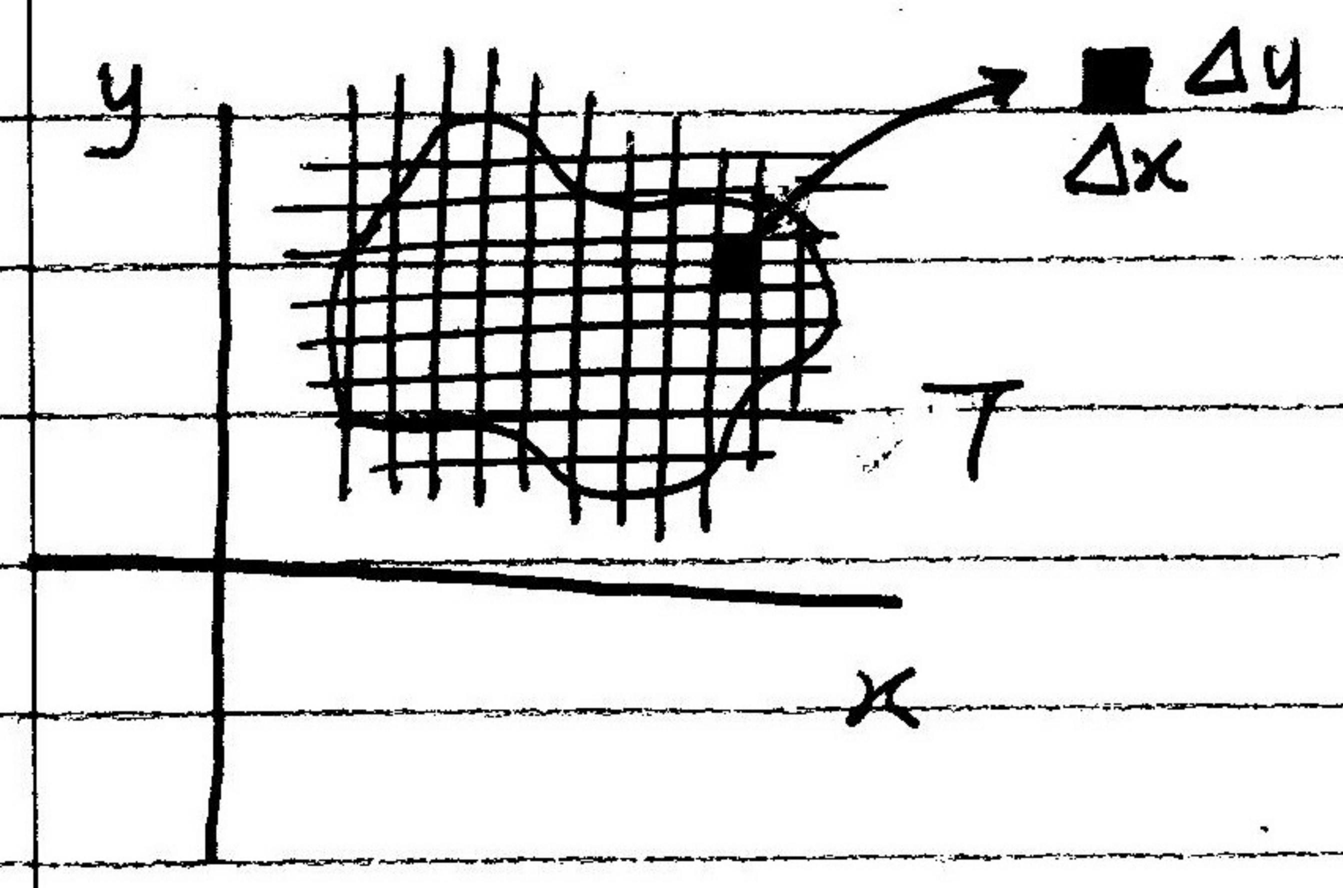
Κλασική Μηχανική 6.3.17

[Στερεά σώματα]

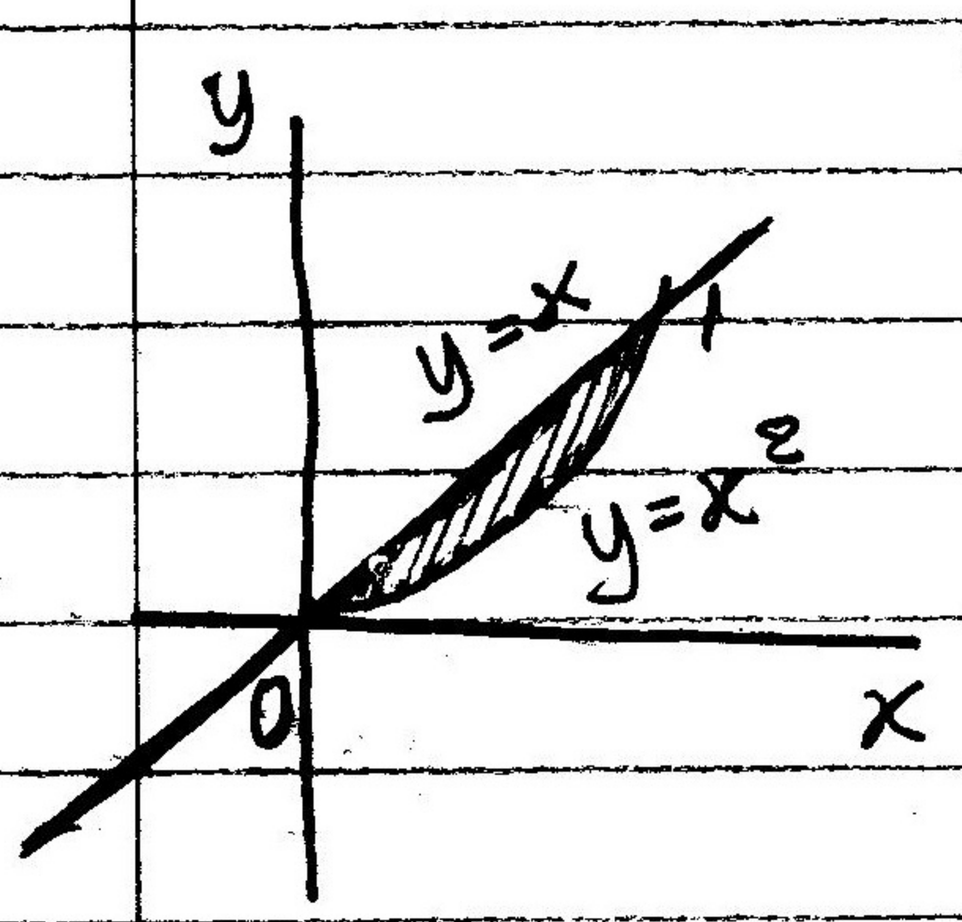
- Βασικό χαρακτηριστικό τους η ακαμψία, δηλαδή το να αλλάζουν ελάχιστα κάτω από μεταβολές στο περιβάλλον τους (πίεση, θερμοκρασία κλπ)
Ένα σώμα που διατηρεί σταθερά το μέγεθος και το σχήμα, καλείται τέλειο.

Ορισμός: Ένα σύστημα σωματιδίων όπου η απόσταση μεταξύ δυο τυχαίων σωματιδίων του, διατηρείται σταθερή, ασχέτως των επιδρώντων σ' αυτά δυνάμεων, καλείται στερεό σώμα.



Το στοιχειώδες εμβαδόν της διαμέρισης που διάλεξα είναι
$\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y = \Delta y \cdot \Delta x$
Το εμβαδόν του χωρίου T είναι $E(T) = \iint_T dx\,dy = \iint_T dA$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περιβάλλεται από τις καμπύλες $y=x$, $y=x^2$, $x,y \geq 0$.



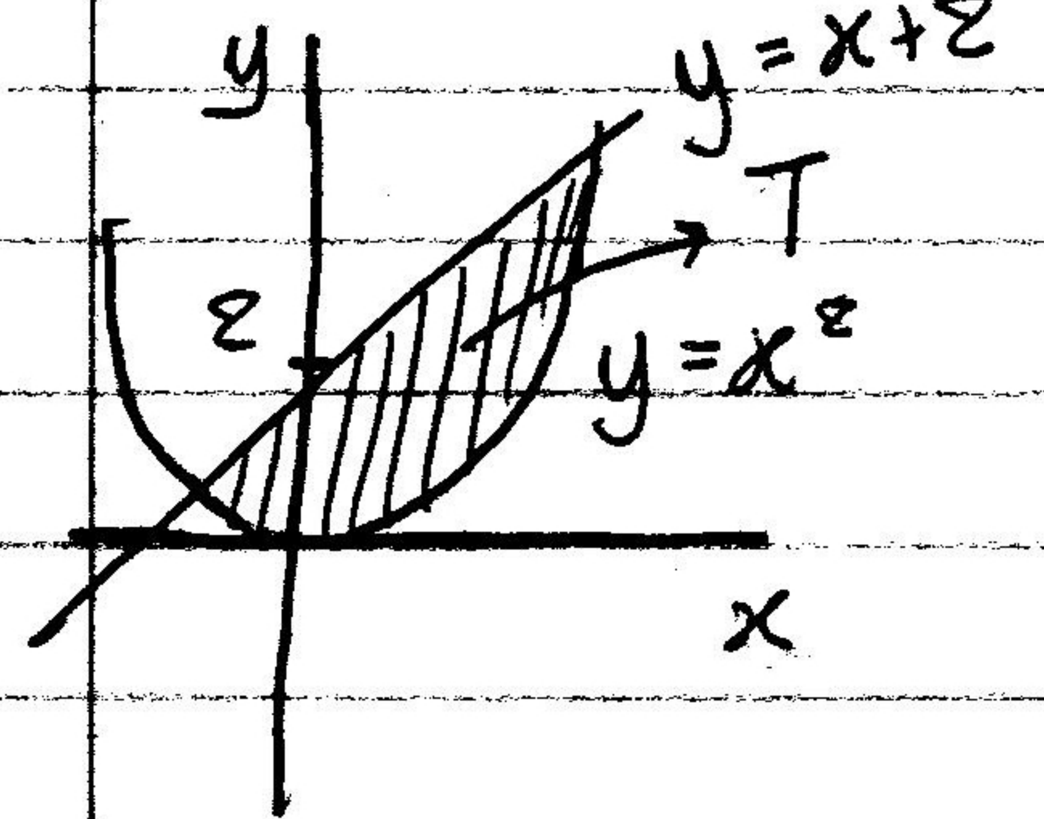
Σημεία τομής των καμπύλων $\begin{cases} y=x \\ y=x^2 \end{cases} \Longleftrightarrow x=x^2 \rightarrow \begin{matrix}(0,0)\\(1,1)\end{matrix}$

$$E = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\,dx = \int_0^1 (x-x^2)\,dx = \frac{1}{6} \text{ τ.μ}$$

$$E = \int_0^1 \int_{y}^{\sqrt{y}} dx\,dy = \int_0^1 (\sqrt{y}-y)\,dy = \frac{1}{6} \text{ τ.μ}$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περιβάλλεται από τις καμπύλες $y = x+2$, $y = x^2$.

$$\begin{cases} y = x+2 \\ y = x^2 \end{cases} \iff x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (-1,1) \\ (2,4) \end{cases}$$



Είναι: $E(T) = \int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dy\,dx = \frac{9}{2}$ τ.μ.

$$E(T) = \iint_T dx\,dy = \int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dy + \int_1^4\int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx\,dy$$

$$= \frac{9}{2} \text{ τ.μ.}$$

Παρατηρώ ότι το αρχικό ολοκλήρωμα "έσπασε" σε δυο επιμέρους ολοκληρώματα.
Έτσι, πρέπει ΠΑΝΤΑ ΝΑ ΠΡΟΣΕΧΩ στην αλλαγή στη σειρά ολοκλήρωσης.

• Αλλαγή μεταβλητής σε πολλαπλή ολοκλήρωση

Η αλλαγή μεταβλητής σε πολλαπλή ολοκλήρωση γίνεται μέσω της Ιακωβιανής ορίζουσας

• (Στον $\mathbb{R}^2$) Έστω $\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \end{cases}$. Τότε

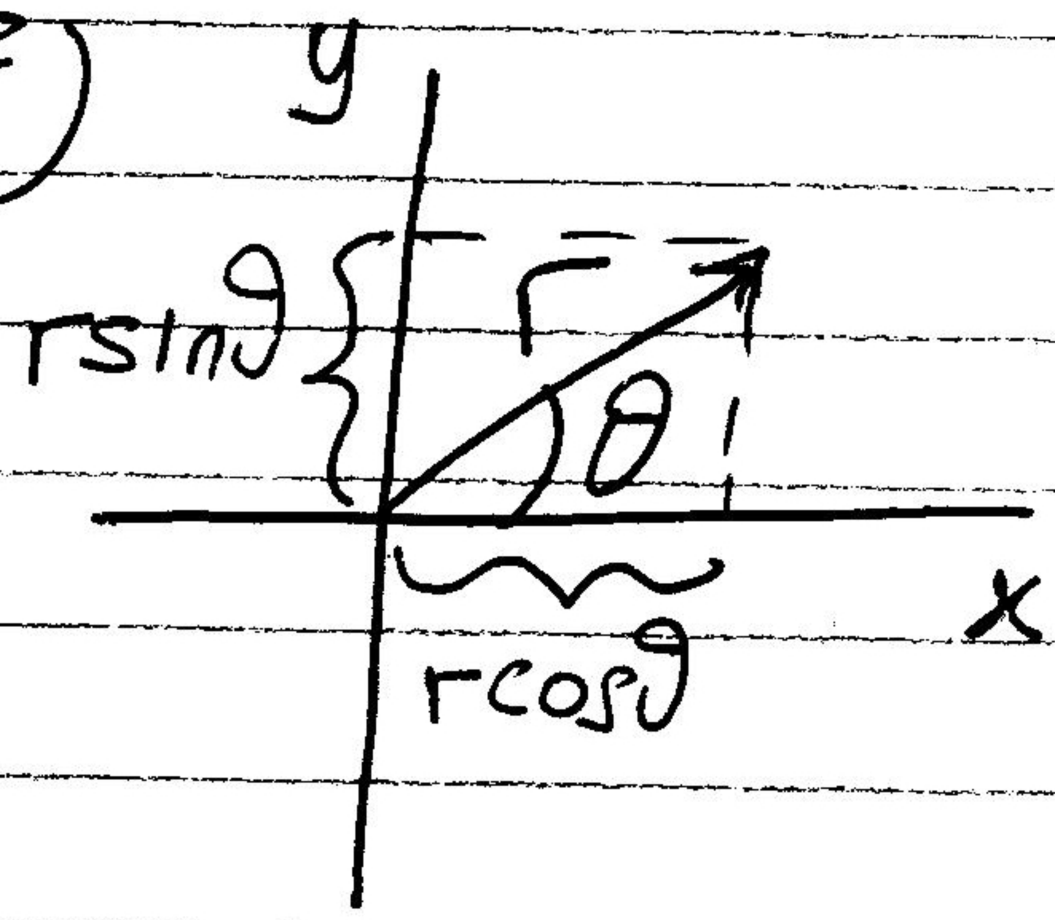
$$\iint_T F(x,y)\,dA = \iint_{\tilde{T}} F(f(u,v), g(u,v))\,|J(u,v)|\,d\tilde{A}$$

, με $dA = dx\,dy$, $d\tilde{A} = du\,dv$, $J(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$

(Στον $\mathbb{R}^3$) $$J(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} & \frac{dx}{dw} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} & \frac{dy}{dw} \\ \frac{dz}{du} & \frac{dz}{dv} & \frac{dz}{dw} \end{pmatrix}$$

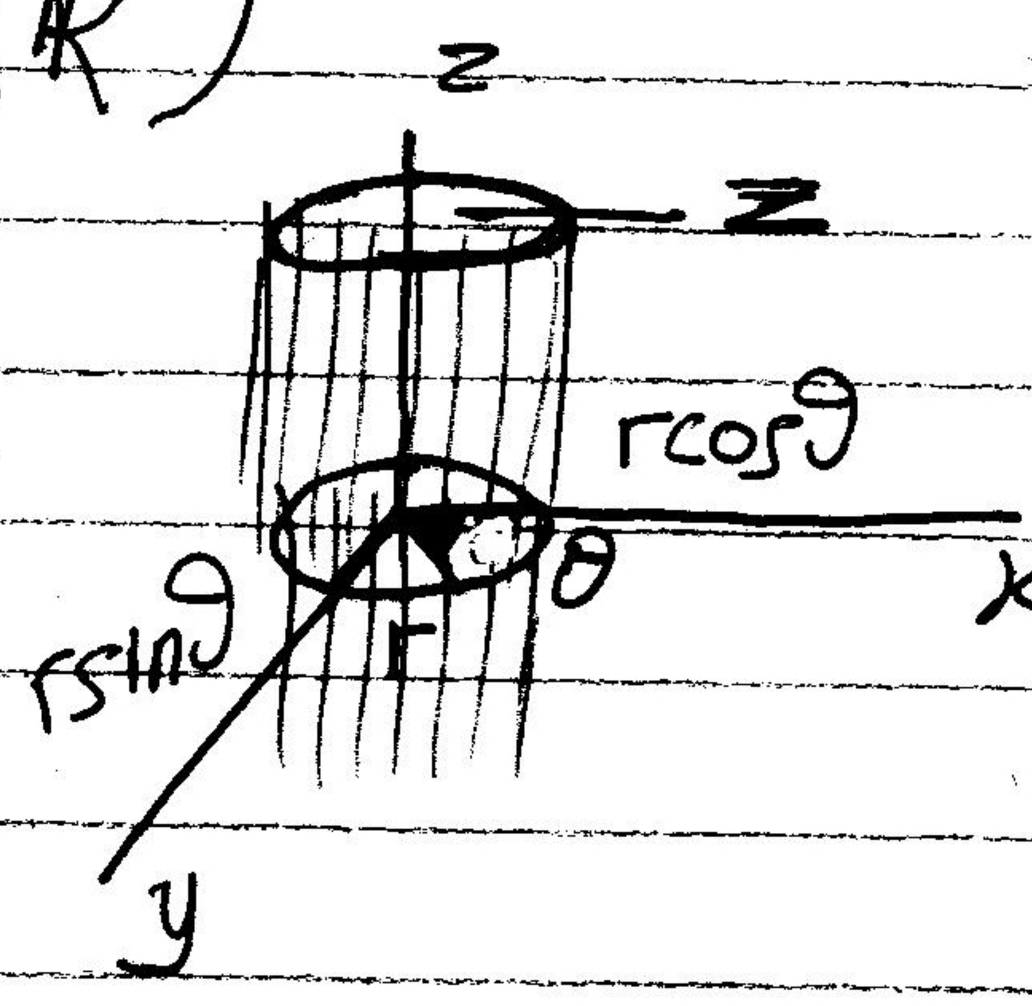
Πολικές Συν/νες ($\mathbb{R}^2$)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



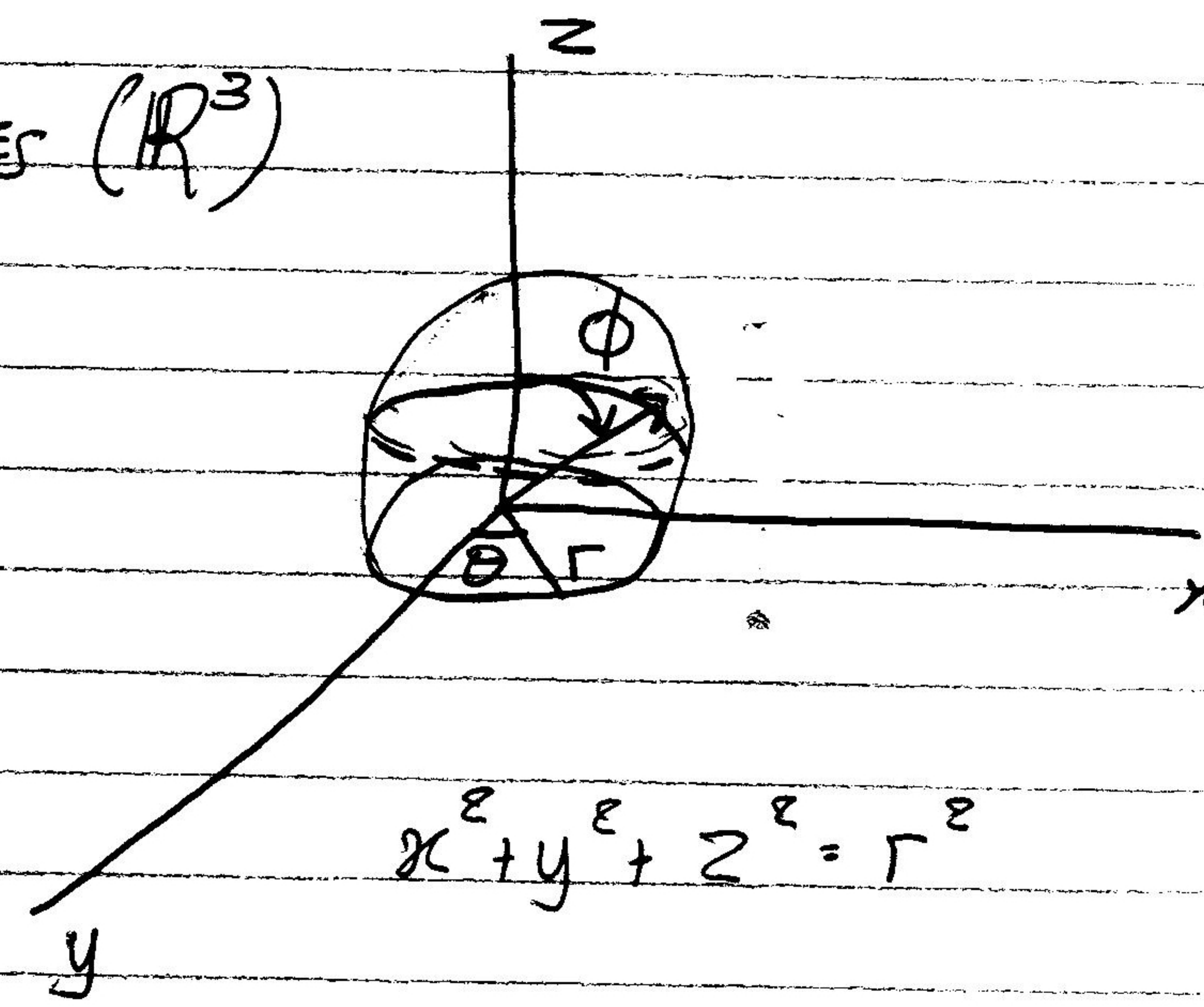
Κυλινδρικές Συν/νες ($\mathbb{R}^3$)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$



Σφαιρικές Συν/νες ($\mathbb{R}^3$)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi. \end{cases}$$



$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

(Μια επανάληψη για βασικά περί ολοκληρωμάτων του ΑΠ4, βοηθάει αρκετά!!)